NUMÉRIQUE 1

PGCD ET FRACTIONS

I Diviseurs d'un nombre

→ **Voir activité :** ***Diviseur ou pas diviseur ? Telle est la question ...***

Exemples

- **Division euclidienne de 45 par 4 :** Poser ; quotient = 11 ; reste = 1 (45 n'est pas dans la table de 4 du coup).
- **Division euclidienne de 67 par 12 :** Poser ; quotient = 5 ; reste = 7 (idem).
- **Division euclidienne de 132 par 11 :** Poser ; quotient = 12 ; reste = 0 (132 est dans la table de 11, 132 vaut exactement $11 \times \mathbf{12}$).
- À la calculatrice, on utilise la touche $\boxed{\vdash}$.

Définition

Soient a et b deux nombres entiers, $b \neq 0$. b est un **diviseur** de a si le reste de la division euclidienne de a par b est **nul**, autrement dit si :

$$a = b \times \text{un nombre entier positif}$$

Exemples

- **Diviseurs de 24 :** 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24 (diviseurs associés et rappels des critères de divisibilité).
- **Diviseurs de 90 :** 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 30 ; 45 ; 90 (idem).

II PGCD : Plus Grand Commun Diviseur

1 Qu'est-ce que c'est ?

Définition

Soient a et b deux entiers positifs. Le **PGCD de** a **et** b, noté $\mathbf{pgcd}(\mathbf{a};\mathbf{b})$, est le plus grand diviseur commun à a et à b (il divise a et b **à la fois**.)

Exemple

D'après l'exemple précédent, les diviseurs communs à 24 et à 90 sont :

$$\mathbf{1;2;3;6}$$

Le plus grand est **6**. Donc : $\mathbf{pgcd}(\mathbf{24};\mathbf{90}) = \mathbf{6}$.
Ce nombre est unique.

Quelles sont les méthodes pour trouver le PGCD de deux nombres entiers positifs ?

2 Méthode "à la main"

On peut lister tous les diviseurs des deux nombres, puis ne retenir que les communs et enfin repérer le plus grand.

Exemples

- **PGCD de 12 et 15 :**

  Les diviseurs de 12 sont : **1** ; 2 ; **3** ; 4 ; 6 ; 12.

  Les diviseurs de 15 sont : **1** ; **3** ; 5 ; 15.

  Donc : $\mathbf{pgcd}(\mathbf{12};\mathbf{15}) = \mathbf{3}$.

- **PGCD de 25 et 50 :**

  Les diviseurs de 25 sont : **1** ; **5** ; **25**.

  Les diviseurs de 50 sont : **1** ; 2 ; **5** ; 10 ; **25** ; 50.

  Donc : $\mathbf{pgcd}(\mathbf{25};\mathbf{50}) = \mathbf{25}$ (car 50 est un multiple de 25).

- **Manipulation calculatrice :** $\boxed{\text{SEC}}$ $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{\cdots}$ $\boxed{\text{SEC}}$ $\boxed{3\,;}$ $\boxed{\cdots}$

!! C'est une méthode simple et efficace sur de petits nombres, mais à éviter avec des grands nombres car on peut facilement oublier des diviseurs.

3 Méthode des soustractions successives

On peut appliquer la **méthode des soustractions successives**. Il s'agit de reprendre les deux derniers nombres de chaque ligne, puis de les soustraire **dans le bon ordre** jusqu'à obtenir **zéro**. **Le PGCD est le dernier résultat non nul.**

Exemples

PGCD de 75 et 60

$75 - 60 = 15$
$60 - 15 = 45$
$45 - 15 = 30$ Attention à l'ordre !
$30 - 15 = 15$ Idem ! - Dernier résultat non nul !
$15 - 15 = 0$

Donc : $\mathbf{pgcd}(\mathbf{75};\mathbf{60}) = \mathbf{15}$

PGCD de 84 et 49

$84 - 49 = 35$
$49 - 35 = 14$
$35 - 14 = 21$
$21 - 14 = 7$ Attention à l'ordre !
$14 - 7 = 7$ Dernier résultat non nul !
$7 - 7 = 0$

Donc : $\mathbf{pgcd}(\mathbf{84};\mathbf{49}) = \mathbf{7}$

III Nombres premiers entre eux

Définition

Deux nombres entiers positifs sont **premiers entre eux** si leur **pgcd vaut 1**.

Exemples

NOMBRES	PGCD	PREMIERS ENTRE EUX ?
10 et 6	2	non
7 et 3	1	oui
35 et 75	5	non
17 et 21	1	oui

IV Fractions

1 Rendre une fraction irréductible

→ **Voir activité :** ***Simplifions simplement !***

Définition

Une fraction est **irréductible** lorsque le numérateur et le dénominateur sont **premiers entre eux**.

Exemples

- Comme $pgcd(7;3) = 1$, la fraction $\frac{7}{3}$ est **irréductible**.
- Comme $pgcd(10;6) = 2 \neq 1$, la fraction $\frac{10}{6}$ est **réductible**. Pour la rendre irréductible, on la simplifie (en haut et en bas) par le PGCD trouvé :

$$\frac{10}{6} = \frac{\mathbf{2} \times 5}{\mathbf{2} \times 3} = \frac{\cancel{\mathbf{2}} \times 5}{\cancel{\mathbf{2}} \times 3} = \frac{5}{3}$$

- Comme $pgcd(35;75) = 5 \neq 1$, la fraction $\frac{35}{75}$ est **réductible**.

$$\frac{35}{75} = \frac{\mathbf{5} \times 7}{\mathbf{5} \times 15} = \frac{\cancel{\mathbf{5}} \times 7}{\cancel{\mathbf{5}} \times 15} = \frac{7}{15}$$

2 Rappels des règles de calculs

Méthode

- Pour **additionner ou soustraire** deux fractions, on doit les réduire **au même dénominateur**. Ensuite, on **additionne ou soustrait les numérateurs tout en gardant le dénominateur commun**.

- $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d} \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

  On peut penser à simplifier avant de calculer le produit de deux fractions.

- Il faut penser à rendre la fraction obtenue **irréductible**.

Exemples

- $\frac{23}{14}+\frac{1}{7}=\frac{23}{14}+\frac{1\times\mathbf{2}}{7\times\mathbf{2}}=\frac{23}{14}+\frac{2}{14}=\frac{25}{14}$
- $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{2\times\mathbf{3}}{5\times\mathbf{3}}-\frac{1\times\mathbf{5}}{3\times\mathbf{5}}=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{1}{15}$
- $\frac{-6}{7}\times\frac{5}{11}=\frac{-6\times 5}{7\times 11}=\frac{-30}{77}=-\frac{30}{77}$
- $\dfrac{\frac{-2}{3}}{\frac{-5}{13}}=\frac{-2}{3}\times\frac{13}{-5}=\frac{-2\times 13}{3\times(-5)}=\frac{-26}{-15}=\frac{26}{15}$
- $A=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{13}{8}=\frac{5}{4}-\frac{\cancel{2}\times 13}{3\times\cancel{2}\times 4}=\frac{5}{4}-\frac{13}{12}=\frac{15}{12}-\frac{13}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

JE DOIS SAVOIR :

- **Poser et effectuer une division euclidienne (avec reste) ;**
- **Lister tous les diviseurs d'un nombre entier positif ;**
- **Rechercher le PGCD de deux nombres par listage ;**
- **Rechercher le PGCD de deux nombres par soustractions successives ;**
- **Calculer avec des fractions ;**
- **Rendre une fraction irréductible avec le PGCD.**